

Kinetische Theorie des Lorentz-Gases aus rotierenden Molekülen

Von L. WALDMANN

Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg, Erlangen
(Z. Naturforschg. 18 a, 1033—1048 [1963]; eingegangen am 9. August 1963)

Irreversible processes like diffusion or heat conduction in gases with rotating molecules are accompanied by a partial polarization (or alignment) of molecular axes. In order to calculate these effects, a BOLTZMANN equation is set up for the distribution function containing the molecular angular velocity. The general properties of the BOLTZMANN equation (H -theorem, corresponding collisions, time reversal) are studied. A complete set of orthonormalized tensors is chosen and the distribution function is expanded with respect to these tensors. Inserting into the BOLTZMANN equation yields the system of the transport-relaxation equations for the expansion coefficients. The ONSAGER-CASIMIR relations for the relaxation constants are stated. Some of the expansion coefficients have a familiar physical significance (particle density, temperature, particle flux, heat flux etc.), others are a measure for the mean polarization (or alignment) of the molecules. The diffusion and heat conduction problems are solved formally, giving general expressions for the transport constants and for the mean molecular polarization in terms of the various relaxation constants. Some of these are explicitly calculated for a special model, the rough spheres. These calculations show that taking the polarization into account may decrease the diffusion constant by about 20% and that fast molecules flying perpendicular to the diffusion flux may be polarized by about 30%.

Die kinetische Theorie von Gasen aus rotierenden Molekülen bringt neue Gesichtspunkte gegenüber dem einatomigen Fall. Der Ablauf eines irreversiblen Vorgangs, wie Diffusion, Wärmeleitung oder Reibung, in einem Gas mit innermolekularen Rotationsfreiheitsgraden ist verknüpft mit einer partiellen Ausrichtung der Molekülachsen. Diese Ausrichtung äußert sich optisch in Strömungsduopelbrechung, sollte direkt experimentell nachweisbar sein an Molekülen, die seitlich z. B. aus einem Diffusionsstrom austreten, und führt zu der als SENFTLEBEN-Effekt bekannten Abhängigkeit der Transportkonstanten von einem äußeren homogenen Magnetfeld. Die Ausrichtung ist auch bei einer exakten Berechnung der Transportkonstanten selbst zu berücksichtigen.

In der bisherigen Literatur über Gase aus rotierenden Molekülen wurde gewöhnlich die Ausrichtung ignoriert, also die Isotropie Näherung hinsichtlich der Molekülachsen gemacht. Berücksichtigt wurde die Ausrichtung bei der Untersuchung der Diffusion eines LORENTZ-Gases aus Spinteilchen^{1, 2} und in zwei Arbeiten von KAGAN et al. über reine Gase aus klassischen rotierenden Molekülen^{3, 4}.

Die Theorie des Spinteilchen-Gases, in welcher die LORENTZsche Methode der Entwicklung nach irreduziblen Tensoren benutzt wurde, war zwar all-

gemein, was den Ansatz über den Einzelstoß anbelangt, aber eingeschränkt insofern, als es im Fall der Spinteilchen keine verschiedenen inneren Energien, also auch keinen Austausch von Translations- und Rotationsenergie der Moleküle gibt. In den russischen Arbeiten andererseits, in denen die CHAPMAN-ENSKOG-Methode verwendet ist, sind die Ansätze für den Einzelstoß spezialisiert.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die erwähnten Einschränkungen zu überwinden. Der Einfachheit halber wird wieder das LORENTZ-Gas betrachtet, nun aber bestehend aus kugelsymmetrischen, klassisch rotierenden Molekülen. Es wird, ähnlich wie früher^{1, 2}, eine Entwicklung nach irreduziblen Tensoren vorgenommen. Diese Tensoren werden nach einem systematischen Verfahren gewonnen und gestatten nun auch eine Entwicklung nach den Betragsquadraten der Linear- und der Winkelgeschwindigkeit. Die früheren formalen Ergebnisse — Diffusions-Relaxations-Gleichungen für das Spinteilchen-Gas — ordnen sich als Spezialfall den neuen erweiterten Beziehungen ein. Als Beispiel werden schließlich einige typische Relaxationskoeffizienten für das Modell der rauhen Kugeln berechnet und die Größe der auftretenden Polarisation sowie ihr Einfluß auf die Diffusionskonstante betrachtet.

¹ L. WALDMANN, Nuovo Cim. 14, 898 [1959]; Z. Naturforschg. 15 a, 19 [1960].

² L. WALDMANN u. H. D. KUPATT, Z. Naturforschg. 18 a, 86 [1963].

³ Y. KAGAN u. L. MAKSYMOW, Soviet Phys.-JETP 14, 604 [1962].

⁴ Y. KAGAN u. A. M. AFANAS'EV, Soviet Phys.-JETP 14, 1096 [1962].



I. Grundlagen

§ 1. Boltzmann-Gleichung des Lorentz-Gases aus rotierenden Molekülen

Es sei angenommen, daß die beweglichen Moleküle zwar kugelsymmetrisch, aber einer inneren, klassischen Rotation fähig seien. Diese Annahme trifft für die rauen Kugeln zu, die später noch genauer betrachtet werden, doch ist es vorerst nicht nötig, das Modell so weitgehend spezialisiert zu denken. Die Moleküle sollen mit unveränderlichen Streuern stoßen, welche unter sich gleich, fixiert und unregelmäßig verteilt seien; ferner seien die Moleküle so selten, daß sie untereinander nicht zusammenstoßen: LORENTZ-Gas. Die Streuer brauchen nicht kugelsymmetrisch zu sein.

Die Lineargeschwindigkeit der beweglichen Moleküle sei mit \mathbf{v} und die Winkelgeschwindigkeit ihrer inneren Rotation mit \mathbf{w} bezeichnet. Man hat es also mit einer Verteilungsfunktion $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ zu tun⁵. Für diese wird eine BOLTZMANN-Gleichung gelten von dem Typ⁶

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \omega(f) = 0 \quad (1.1)$$

mit einem linearen Stoßoperator

$$-\omega(f) = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}},$$

dessen nähere Gestalt zunächst zu betrachten ist. Er zerfällt, wie es vom einatomigen Fall her geläufig

$$\mathbf{v}' = \mathbf{a}'(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{w}' = \mathbf{b}'(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{k}' = \mathbf{c}'(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{k}), \quad (1.2)$$

oder umgekehrt

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{v}', \mathbf{w}', \mathbf{k}'), \quad \mathbf{w} = \mathbf{b}(\mathbf{v}', \mathbf{w}', \mathbf{k}'), \quad \mathbf{k} = \mathbf{c}(\mathbf{v}', \mathbf{w}', \mathbf{k}'). \quad (1.2a)$$

Diese Stoßgleichungen sind, ihrem Sinne nach, definiert nur in den Bereichen

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}' < 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} > 0, \quad (1.3)$$

welche sich gegenseitig bedingen. Ferner werden sie den Energiesatz

$$E' = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} \Theta w'^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \Theta w^2 = E \quad (1.4)$$

identisch erfüllen (m Molekülmasse, Θ Molekülträgheitsmoment). — Die Verluststöße andererseits beginnen mit den Geschwindigkeiten \mathbf{v} , \mathbf{w} an einer durch \mathbf{k} charakterisierten Eintrittsstelle, für welche $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} < 0$ gilt.

Für den Stoßterm aus (1.1) gilt nun

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}} \delta^3 v \delta^3 w = n_s R^2 \left[\int_{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}' < 0} f' \delta^3 v' \delta^3 w' (-\mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}') d^2 k' - f \delta^3 v \delta^3 w \int_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} < 0} (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) d^2 k \right].$$

⁵ Es wird angenommen, daß die Verteilungsfunktion nicht von den drei Winkeln abhängt, welche die Orientierung des Moleküls festlegen. Bei kugelförmigen Molekülen gilt diese Eigenschaft zu allen Zeiten, wenn sie zu einer bestimmten Zeit erfüllt ist.

ist, in zwei Anteile, den Gewinn- und Verluststößen entsprechend.

Es sei um jeden Streuer eine Kugel vom Radius R gelegt. Diese (Wirkungs-)Kugel sei möglichst klein gewählt, aber doch groß genug, daß außerhalb derselben keinerlei Wechselwirkung mit dem betreffenden Streuer stattfindet. Es seien zunächst die Gewinnstöße ins Auge gefaßt. Zu deren Beschreibung

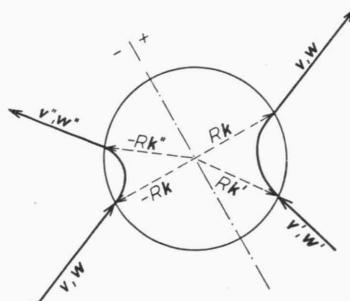


Abb. 1. Stoß, welcher von $\mathbf{v}', \mathbf{w}', \mathbf{k}'$ zu $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{k}$ führt; entsprechender oder korrespondierender Stoß, welcher von $\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{k}$ zu $\mathbf{v}'', \mathbf{w}'', -\mathbf{k}''$ führt.

sei der Einheitsvektor vom Mittelpunkt der Wirkungskugel zum Eintrittspunkt des bewegten Teilchens in dieselbe mit \mathbf{k}' bezeichnet, derjenige zum Austrittspunkt mit \mathbf{k} . Die Geschwindigkeiten beim Eintritt seien mit \mathbf{v}' , \mathbf{w}' , diejenigen beim Austritt mit \mathbf{v} , \mathbf{w} bezeichnet (Abb. 1). Dann wird es einen Zusammenhang geben der Art

⁶ Die BOLTZMANN-Gleichung hat ohne äußere Kräfte und Drehmomente dieselbe Form wie beim einatomigen Gas, da bei kräftefrei bewegten kugelförmigen Molekülen deren Winkelgeschwindigkeit konstant ist, so daß der Term $(\partial/\partial \mathbf{w}) \cdot i \mathbf{v} f$ verschwindet.

Hier bezeichnen n_s die Konzentration der Streuer und f bzw. f' die Verteilungsfunktion, für \mathbf{v} , \mathbf{w} bzw. \mathbf{v}' , \mathbf{w}' und gleiche t , \mathbf{r} genommen. Das Flächen-element auf der Einheitskugel k^2 bzw. $k'^2 = 1$, über deren Hälfte jeweils zu integrieren ist, wurde d^2k bzw. d^2k' genannt. Das variable Intervall $\delta^3v' \delta^3w'$ in dem ersten Integral (Gewinnstöße) ist bei der Integration über \mathbf{k}' jeweils so zu wählen, daß nach dem Stoß die Geschwindigkeiten \mathbf{v} , \mathbf{w} im festen Intervall $\delta^3v \delta^3w$ liegen. Gemäß dem LIOUVILLE-Satz gilt aber⁷

$$d^3v' d^3w' (-\mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}') d^2k' = d^3v d^3w (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) d^2k. \quad (1.5)$$

Somit hat man einfacher

$$-\omega(f) = n_s R^2 \left(\int_+ f' \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k + \int_- f \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k \right), \quad (1.6)$$

wo die Integrationen

$$\pm \text{ entsprechend } \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \geq 0$$

gemeint sind. Indem man im zweiten Integral \mathbf{k} durch $-\mathbf{k}$ ersetzt, kommt die äquivalente Form zu stande

$$\omega(f) = n_s R^2 \int_+ (f - f') \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k. \quad (1.6a)$$

Es sollen nun einige allgemeine Eigenschaften dieses Stoßoperators studiert werden. Der Wert des Stoßoperators ist übrigens von der Wahl für R , wofern dies nur hinreichend groß gewählt ist, unabhängig, vorausgesetzt, daß die Verteilungsfunktion sich auf einer Strecke der Länge R nur unmerklich ändert.

§ 2. Integrale des Stoßoperators; Definitheit

Die Erhaltung der Teilchenzahl und der Energie beim Einzelstoß kommt zum Ausdruck in den Beziehungen

$$\omega(1) = 0; \quad \omega(E) = 0, \quad (2.1)$$

welche zu den entsprechenden Erhaltungsgleichungen für das Gas führen werden.

Das H -Theorem hängt mit der Definitheit des Stoßoperators zusammen. Im Hinblick auf die spätere Beschränkung auf kleine Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht, welche hier allerdings nicht notwendig wäre, werde gesetzt

$$f = f_0(1 + \Phi),$$

wobei

$$f_0 = n_0 \left(\frac{V m \Theta}{2 \pi k T_0} \right)^3 e^{-E/k T_0}, \quad n_0 = \int \int f_0 d^3v d^3w$$

die MAXWELL-Verteilung unter Einschluß der Rotation bedeutet. Ferner sei für ständigen weiteren Gebrauch die Abkürzung

$$\langle \Phi \rangle_0 = \int \int \frac{f_0}{n_0} \Phi d^3v d^3w \quad (2.3)$$

eingeführt. Sie bezeichnet den (momentanen, lokalen) Mittelwert irgendeiner Funktion Φ der Geschwindigkeiten \mathbf{v} , \mathbf{w} (und eventuell von t , \mathbf{r}) im thermischen Gleichgewicht. Die Definitheit des Stoßoperators kommt dann zum Ausdruck in der Ungleichung

$$\langle \Phi \omega(\Phi) \rangle_0 \geq 0. \quad (2.4)$$

Um sie zu beweisen, sei dieser Mittelwert explizit aufgeschrieben:

$$\langle \Phi \omega(\Phi) \rangle_0 = n_s R^2 \left\langle \int_+ (\Phi^2 - \Phi \Phi') \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k \right\rangle.$$

Nun ist

$$\left\langle \int_+ \Phi^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k \right\rangle_0 = \left\langle \int_+ \Phi'^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k \right\rangle_0,$$

was man sofort sieht, indem man zunächst \mathbf{k} durch $-\mathbf{k}$ ersetzt, sodann die Integrationsvariablen \mathbf{v} , \mathbf{w} , \mathbf{k} in \mathbf{v}' , \mathbf{w}' , \mathbf{k}' umbenamt und schließlich mittels des LIOUVILLE-Satzes (1.5) wieder zu einer Integration über \mathbf{v} , \mathbf{w} , \mathbf{k} zurückkehrt. Demnach kann man den obigen Integranden $\Phi^2 - \Phi \Phi'$ ersetzen durch $\frac{1}{2}(\Phi^2 + \Phi'^2) - \Phi \Phi' = \frac{1}{2}(\Phi - \Phi')^2$, womit die Definitheit evident ist.

§ 3. Stoßklammern und ihre Symmetrien

Unter der Stoßklammer zweier Funktionen Ψ und Φ sei verstanden, (1.6) benutzend,

$$\langle \Psi \omega(\Phi) \rangle_0 = -n_s R^2 \int \int d^3v d^3w \frac{f_0}{n_0} \Psi \left(\int_+ \Phi' \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k + \Phi \int_- \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k \right) \quad (3.1)$$

und es soll zunächst der Einfluß einer Vertauschung von Ψ und Φ untersucht werden.

⁷ Streng genommen hätten in (1.5) und in der vorhergehenden Gleichung auch jeweils noch die Intervalle der drei Winkel zu stehen, welche die Orientierung des Moleküls

festlegen. Da sich diese Intervalle beim Stoß kugelförmiger Moleküle aber nicht ändern, können sie fortgelassen werden.

Dazu seien im ersten Term rechts, gemäß dem LIOUVILLE-SATZ (1.5), das Integrationselement $-d^3v' d^3w'$ $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}' d^2k'$ eingeführt und dementsprechend, nach der Umkehrung (1.2a), \mathbf{v} , \mathbf{w} als Funktionen von \mathbf{v}' , \mathbf{w}' , \mathbf{k}' aufgefaßt. Die Integration in diesem Term erstreckt sich jetzt über Werte $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}' < 0$. Nun werden darin \mathbf{v}' , \mathbf{w}' , \mathbf{k}' in \mathbf{v} , \mathbf{w} , $-\mathbf{k}$ umbenannt. In Φ stehen dann die Variablen \mathbf{v} , \mathbf{w} , in Ψ aber treten die Geschwindigkeiten auf

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{k}), \quad \mathbf{w}'' = \mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{k}),$$

und es sei eingeführt

$$-\mathbf{k}'' = \mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{k}) \quad (3.2)$$

oder, was dasselbe ist

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}'(\mathbf{v}'', \mathbf{w}'', -\mathbf{k}''), \quad \mathbf{w} = \mathbf{b}'(\mathbf{v}'', \mathbf{w}'', -\mathbf{k}''), \quad -\mathbf{k} = \mathbf{c}'(\mathbf{v}'', \mathbf{w}'', -\mathbf{k}''). \quad (3.2a)$$

Dies bezeichnet nach der Terminologie von BOLTZMANN⁸ den entsprechenden oder korrespondierenden Stoß, welcher von \mathbf{v} , \mathbf{w} , $-\mathbf{k}$ nach \mathbf{v}'' , \mathbf{w}'' , $-\mathbf{k}''$ führt (s. Abb. 1). Die obige Stoßklammer schreibt sich nach diesen Umformungen so:

$$\langle \Psi \omega(\Phi) \rangle_0 = -n_s R^2 \int \int d^3v d^3w \frac{f_0}{n_0} \Phi \left(\int_+ \Psi'' \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k + \int_- \Psi' \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k \right).$$

Demnach wird man einen ω zugeordneten Operator $\tilde{\omega}$ einführen, welcher auf den korrespondierenden Stößen beruht,

$$-\tilde{\omega}(f) = n_s R^2 \left(\int_+ f'' \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k + \int_- f' \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k \right) \quad (3.3)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\tilde{\omega}(f) = n_s R^2 \int_+ (f - f'') \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d^2k. \quad (3.3a)$$

Damit hat man die gesuchte Beziehung für die Stoßklammer

$$\langle \Psi \omega(\Phi) \rangle_0 = \langle \Phi \tilde{\omega}(\Psi) \rangle_0. \quad (3.4)$$

Beim einatomigen Gas gilt $\omega \equiv \tilde{\omega}$. Die (ENSKOG-sche) Stoßklammer ist in diesem Fall symmetrisch in den beiden Funktionen Ψ , Φ , was wohlbekannt ist. Bei rotierenden Molekülen hingegen sind ω und $\tilde{\omega}$ sehr wohl zu unterscheiden.

Als nächstes sei die Folgerung aus der Spiegelungsinvarianz der Stoßgleichungen betrachtet. Diese Invarianz meint, daß neben (1.2) auch die Beziehung gilt

$$\begin{aligned} -\mathbf{v}' &= \mathbf{a}'(-\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{k}), \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{b}'(-\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{k}), \\ -\mathbf{k}' &= \mathbf{c}'(-\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nun sei irgendeiner Funktion $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ durch Spiegelung (Paritätsoperation) die Funktion

$$\Phi_T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \Phi(-\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (3.6)$$

⁸ L. BOLTZMANN, Vorlesungen über Gastheorie II, Leipzig 1898, S. 239; s. a. R. C. TOLMAN, Principles of Statistical Mechanics, Oxford 1938, S. 112.

zugeordnet. Dann gilt

$$\langle \Psi \omega(\Phi) \rangle_0 = \langle \Psi_T \omega(\Phi_T) \rangle_0. \quad (3.7)$$

Das sieht man sofort, indem man im linken Ausdruck die Integrationsvariablen \mathbf{v} , \mathbf{w} , \mathbf{k} durch $-\mathbf{v}$, \mathbf{w} , $-\mathbf{k}$ ersetzt und (3.5 und 6) benutzt.

Schließlich werde die Invarianz bei Bewegungsumkehr vorausgesetzt, das soll heißen, daß neben (1.2) auch gilt

$$\begin{aligned} -\mathbf{v} &= \mathbf{a}'(-\mathbf{v}', -\mathbf{w}', \mathbf{k}'), \\ -\mathbf{w} &= \mathbf{b}'(-\mathbf{v}', -\mathbf{w}', \mathbf{k}'), \\ \mathbf{k} &= \mathbf{c}'(-\mathbf{v}', -\mathbf{w}', \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (3.8)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\begin{aligned} -\mathbf{v}' &= \mathbf{a}(-\mathbf{v}, -\mathbf{w}, \mathbf{k}), \\ -\mathbf{w}' &= \mathbf{b}(-\mathbf{v}, -\mathbf{w}, \mathbf{k}), \\ \mathbf{k}' &= \mathbf{c}(-\mathbf{v}, -\mathbf{w}, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.8a)$$

Nun sei irgendeiner Funktion $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ durch Bewegungsumkehr die Funktion

$$\Phi_T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \Phi(-\mathbf{v}, -\mathbf{w}) \quad (3.9)$$

zugeordnet. Dann gilt

$$\langle \Psi \omega(\Phi) \rangle_0 = \langle \Phi_T \omega(\Psi_T) \rangle_0. \quad (3.10)$$

Zum Beweis geht man von der allgemeinen Beziehung (3.4) aus und benennt rechts die Integrationsvariablen \mathbf{v} , \mathbf{w} , \mathbf{k} um in $-\mathbf{v}$, $-\mathbf{w}$, $-\mathbf{k}$. Dabei geht Φ in Φ_T über, und in $\tilde{\omega}(\Psi)$ entstehen an Stelle von \mathbf{v}'' , \mathbf{w}'' die Geschwindigkeiten $-\mathbf{v}'$, $-\mathbf{w}'$, wie der Vergleich von (3.2) und (3.8a) zeigt. Also kommt in der Tat $\omega(\Psi_T)$ an Stelle von $\tilde{\omega}(\Psi)$, und der Beweis ist erbracht.

N Potenz	Skalare $l=0$ $\Phi^{(0)} = 1$	Vektoren $l=1$ $\Phi_{\mu}^{(0)} = V_{\mu}$ $\Phi_{\mu}^{(1)} = (V^2 - \frac{5}{2}) V_{\mu}$	irred. Tensoren 2. Stufe ($l=2$) $\Phi_{\mu\nu}^{(0)} = V_{\mu} V_{\nu} - \frac{1}{3} V^2 \delta_{\mu\nu}$ $\Phi_{\mu\nu}^{(1)} = (V^2 - \frac{5}{2}) V_{\mu} V_{\nu}$.
0		—	—	.
1	—	—	—	.
2		—	—	.
3	—	—	—	.
...

Tab. 1. Einfache irreduzible Tensoren in kartesischen Koordinaten.

II. Entwicklung nach irreduziblen Tensoren

§ 4. Das vollständige System orthonormierter Tensoren

Ziel ist es, die Verteilungsfunktion um die MAXWELL-Funktion aus (2.2) zu entwickeln mittels eines vollständigen Satzes von irreduziblen Tensoren. Es ist zweckmäßig, sich dabei der dimensionslosen Variablen

$$\mathbf{V} = \sqrt{\frac{m}{2kT_0}} \mathbf{v}, \quad \mathbf{W} = \sqrt{\frac{\Theta}{2kT_0}} \mathbf{w} \quad (4.1)$$

zu bedienen. Damit wird

$$\frac{E}{kT_0} = V^2 + W^2.$$

Um zu den gewünschten irreduziblen Tensoren zu gelangen, sei zunächst die Eigenwertgleichung (SCHRÖDINGER-Gleichung des harmonischen Oszillators) betrachtet

$$\frac{1}{2} (-\Delta_V + V^2) \varphi(\mathbf{V}) = (N + \frac{3}{2}) \varphi(\mathbf{V}).$$

Hier bezeichnet Δ_V den LAPLACE-Operator im dreidimensionalen \mathbf{V} -Raum, $N + \frac{3}{2}$ den Eigenwertparameter. Als Randbedingung wird $\varphi = 0$ für $V \rightarrow \infty$ gefordert. Nun sei gesetzt

$$\varphi(\mathbf{V}) = \Phi(\mathbf{V}) e^{-V^2/2}.$$

Die orthogonalen Eigenlösungen (Eigentensoren) – zugleich Drehimpulseigenfunktionen – sind dann bekanntlich

$$\Phi_{lm}^{(n)}(\mathbf{V}) \propto S_{l+\frac{1}{2}}^{(n)}(V^2) V^l Y_{lm}$$

mit den Eigenwerten

$$N = l + 2n; \quad l = 0, 1, \dots; \quad n = 0, 1, \dots$$

Der erste Faktor $S^{(n)}$ bezeichnet das SONINE-Polynom vom Grad n in V^2 , so daß also N auch den Grad von Φ in V angibt. Die Kugelflächenfunktionen Y hängen ab von den zwei Polarwinkeln von \mathbf{V} . Zu $l=0$ gehören die Skalare, zu $l=1$ die Vektoren, zu

$l=2$ die irreduziblen Tensoren zweiter Stufe usf. Statt der Darstellung in Polarkoordinaten seien im folgenden kartesische Komponenten benutzt, welche durch die Indizes $\mu; \nu; \dots = 1, 2, 3$ unterschieden werden. Die kartesischen Komponenten der Skalare, Vektoren, irreduziblen Tensoren zweiter Stufe usf. sei mit $\Phi^{(n)}$, $\Phi_{\mu}^{(n)}$, $\Phi_{\mu\nu}^{(n)}$ usf. bezeichnet. In Tab. 1 sind die ersten davon aufgeführt. Auf eine systematische Normierung wurde dabei verzichtet.

Nun sei die Eigenwertgleichung (SCHRÖDINGER-Gleichung zweier ungekoppelter harmonischer Oszillatoren) betrachtet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (-\Delta_V - \Delta_W + V^2 + W^2) \varphi(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \\ = (N + 3) \varphi(\mathbf{V}, \mathbf{W}). \end{aligned}$$

Es werde gesetzt

$$\varphi(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \Phi(\mathbf{V}, \mathbf{W}) e^{-(V^2 + W^2)/2}.$$

Die Eigenlösungen, so ausgewählt, daß sie auch Eigenlösungen der z -Komponente und des Betrags des Gesamtdrehimpulses sind, gruppieren sich wieder in Skalare, Vektoren usf. und sind gemäß der CLEBSCH–GORDAN-Reihe gegeben durch

$$\Phi_{LMl_1l_2}^{(n_1n_2)}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \sum_{m_1m_2} C(L l_1 l_2 M m_1 m_2) \cdot \Phi_{l_1m_1}^{(n_1)}(\mathbf{V}) \Phi_{l_2m_2}^{(n_2)}(\mathbf{W}),$$

wo rechts die „einfachen“, nur von \mathbf{V} bzw. \mathbf{W} abhängigen Φ von vorher stehen. Diese sind dabei geeignet zu normieren. Der zugehörige Eigenwert ist jetzt

$$N = l_1 + 2n_1 + l_2 + 2n_2.$$

Er gibt die Gesamtpotenz von V, W an.

Diese Lösungen seien nun wieder in kartesischen Koordinaten notiert. Zusammengesetzte Skalare entstehen durch Multiplizieren von zwei einfachen Skalaren $\Phi^{(n_1)}(V) \Phi^{(n_2)}(W)$ oder aus zwei einfachen Vektoren gemäß $\Phi_{\mu}^{(n_1)}(\mathbf{V}) \Phi_{\mu}^{(n_2)}(\mathbf{W})$ oder aus zwei einfachen Tensoren gemäß $\Phi_{\mu\nu}^{(n_1)}(\mathbf{V}) \Phi_{\mu\nu}^{(n_2)}(\mathbf{W})$ usf.⁹

⁹ Für doppelte griechische Indizes gelte die Summationsvorschrift.

Potenz	Skalare	PL	T	Vektoren	PL	T	.
0	$\Phi_1 = 1$	+ 0	+	-			.
1	-			$\Phi_1 = \sqrt{2} V$ $\Psi_1 = \sqrt{2} W$	- 1	-	.
2	$\Phi_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} (V^2 - \frac{3}{2})$ $\Phi_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} (W^2 - \frac{3}{2})$ $\Psi_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} V \cdot W$	+ 0 + 0 - 0	+	$\Phi_2 = \sqrt{2} V \times W$	- 1	+	.
3	-			$\Phi_3 = \frac{2}{\sqrt{5}} (V^2 - \frac{5}{2}) V$ $\Phi_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} (W^2 - \frac{3}{2}) V$ $\Phi_5 = 2 \sqrt{\frac{3}{5}} [W(W \cdot V) - \frac{1}{3} W^2 V]$ $\Psi_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} (V^2 - \frac{3}{2}) W$ $\Psi_3 = \frac{2}{\sqrt{5}} (W^2 - \frac{5}{2}) W$ $\Psi_4 = 2 \sqrt{\frac{3}{5}} [V(V \cdot W) - \frac{1}{3} V^2 W]$	- 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1	-	.
.

Tab. 2. Zusammengesetzte Skalare und Vektoren in kartesischen Koordinaten.

Zusammengesetzte Vektoren entstehen aus einem einfachen Skalar und einem einfachen Vektor z. B. gemäß $\Phi^{(n_1)}(\mathbf{V}) \Phi_{\mu}^{(n_2)}(\mathbf{W})$ oder zwei einfachen Vektoren gemäß $[\Phi^{(n_1)}(\mathbf{V}) \times \Phi^{(n_2)}(\mathbf{W})]_{\mu}$ oder aus einem einfachen Tensor 2. Stufe und einem Vektor z. B. gemäß $\Phi_{\mu\nu}^{(n_1)}(\mathbf{V}) \Phi_{\nu}^{(n_2)}(\mathbf{W})$. In dieser Weise erhält man das in Tab. 2 angegebene Schema, zu dem noch einige Erläuterungen zu geben sind.

Die Spalte $P = \pm$ gibt an, wie sich die betreffende Größe bei der Spiegelung, d. h. bei Ersetzen von \mathbf{V}, \mathbf{W} durch $-\mathbf{V}, -\mathbf{W}$, verhält. $L=0$ charakterisiert die Skalare, $L=1$ die Vektoren. Die echten Skalare ($P=+$) und polaren Vektoren ($P=-$) sind überdies jetzt mit Φ bzw. Φ bezeichnet, die Pseudo-Skalare ($P=-$) und axialen Vektoren ($P=+$) mit Ψ bzw. Ψ , und beide sind durch untere Indizes fortlaufend numeriert. Die Spalte $T=\pm$ gibt an, wie sich die betreffende Größe bei der Bewegungsumkehr, d. h. bei Ersetzen von \mathbf{V}, \mathbf{W} durch $-\mathbf{V}, -\mathbf{W}$ verhält.

Die der Tab. 2 zugrunde liegende Orthonormierung lautet

$$\langle \Phi_i \Phi_k \rangle_0 = \langle \Psi_i \Psi_k \rangle_0 = \delta_{ik}, \quad (4.2)$$

$$\langle \Phi_{\mu i} \Phi_{\nu k} \rangle_0 = \langle \Psi_{\mu i} \Psi_{\nu k} \rangle_0 = \delta_{\mu\nu} \delta_{ik}, \quad (4.3)$$

wobei ferner alle nicht angeschriebenen Kombinationen verschwinden (orthogonal sind). Die Normierungsfaktoren wurden berechnet mittels der Formeln (A 5 und 6) des Anhangs.

§ 5. Entwicklung der Verteilungsfunktion

Die zusammengesetzten irreduziblen Tensoren, welche im vorigen Paragraphen eingeführt wurden, seien nun dazu benutzt, eine beliebige Verteilungsfunktion f um diejenige f_0 des Gleichgewichts zu entwickeln. Die Entwicklung werde bereits mit den Vektoren abgebrochen:

$$f = f_0 (1 + \Phi) \approx f_0 [1 + \sum_k (\Phi_k a_k + \Psi_k b_k + \Phi_{\lambda k} a_{\lambda k} + \Psi_{\lambda k} b_{\lambda k})]. \quad (5.1)$$

Für doppelte griechische Indizes gelte wie vorher die Summationsvorschrift.

Die Entwicklungskoeffizienten a_k , usw. sind Funktionen von t und \mathbf{r} und lassen dank der Orthonormierungsrelationen der Φ_k usw. eine einfache physikalische Interpretation zu. Es werde an Hand der Teilchenkonzentration

$$n = \iint f d^3v d^3w \quad (5.2)$$

in Analogie zu (2.3) der momentane lokale Mittelwert $\langle \Phi \rangle$ einer beliebigen Funktion Φ in dem durch

die Verteilung f gegebenen allgemeinen Zustand definiert:

$$\langle \Phi \rangle = \int \int \frac{f}{n} \Phi d^3v d^3w. \quad (5.3)$$

Wegen der Orthogonalität der Entwicklungstensoren und ihrer Normierung (4.2 und 3) erhält man aus (5.1) durch Multiplizieren mit Φ_i usw. und Integration über \mathbf{v} , \mathbf{w} die Beziehungen

$$\begin{aligned} n\langle \Phi_i \rangle &= n_0(\delta_{11} + a_i), & n\langle \Phi_i \rangle &= n_0 \mathbf{a}_i, \\ n\langle \Psi_i \rangle &= n_0 b_i, & n\langle \Psi_i \rangle &= n_0 \mathbf{b}_i. \end{aligned} \quad (5.4)$$

An Hand von Tab. 2 kann dies im einzelnen nun interpretiert werden. Dabei gehen wir von den dimensionslosen Geschwindigkeiten (4.1) wieder zurück zu den ursprünglichen gemäß

$$\mathbf{V} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{v}/v_0, \quad \mathbf{W} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{w}/w_0 \quad (5.5)$$

$$\text{mit } v_0 = \sqrt{3kT_0/m}, \quad w_0 = \sqrt{3kT_0/\Theta}$$

und kürzen ab

$$E_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v^2, \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta w^2. \quad (5.6)$$

So erhält man die folgende Interpretation der Entwicklungskoeffizienten

a) Skalare

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (n - n_0)/n_0 \\ \mathbf{a}_2 &= \sqrt{\frac{3}{2}} n(T_{\text{trans}} - T_0)/n_0 T_0 \quad \text{mit } \frac{3}{2} k T_{\text{trans}} = \langle E_{\text{trans}} \rangle \\ \mathbf{a}_3 &= \sqrt{\frac{3}{2}} n(T_{\text{rot}} - T_0)/n_0 T_0 \quad \text{mit } \frac{3}{2} k T_{\text{rot}} = \langle E_{\text{rot}} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

b) Pseudoskalär

$$b_1 = \sqrt{3} n \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle / n_0 v_0 w_0 \quad (5.8)$$

c) Polare Vektoren

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \sqrt{3} \mathbf{j} / n_0 v_0 \\ &\quad \text{mit } \mathbf{j} = n \langle \mathbf{v} \rangle, \text{ Teilchenstrom} \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{3}{12} n \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle / n_0 v_0 w_0 \\ \mathbf{a}_3 &= \sqrt{\frac{6}{5}} n \langle (E_{\text{trans}} - \frac{5}{2} k T_0) \mathbf{v} \rangle / n_0 k T_0 v_0 = \sqrt{\frac{6}{5}} [\mathbf{q}_{\text{trans}} + \frac{5}{2} k (T - T_0) \mathbf{j}] / n_0 k T_0 v_0 \\ &\quad \text{mit } \mathbf{q}_{\text{trans}} = n \langle (E_{\text{trans}} - \frac{5}{2} k T) \mathbf{v} \rangle, \text{ translatorischer Wärmestrom} \\ \mathbf{a}_4 &= \sqrt{2} n \langle (E_{\text{rot}} - \frac{3}{2} k T_0) \mathbf{v} \rangle / n_0 k T v_0 = \sqrt{2} [\mathbf{q}_{\text{rot}} + \frac{3}{2} k (T - T_0) \mathbf{j}] / n_0 k T_0 v_0 \\ &\quad \text{mit } \mathbf{q}_{\text{rot}} = n \langle (E_{\text{rot}} - \frac{3}{2} k T) \mathbf{v} \rangle, \text{ rotatorischer Wärmestrom} \\ \mathbf{a}_5 &= \frac{9}{10} n \langle \mathbf{w} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{3} w^2 \mathbf{v} \rangle / n_0 w_0^2 v_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

d) Axialvektoren

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \sqrt{3} n \langle \mathbf{w} \rangle / n_0 w_0 \\ \mathbf{b}_2 &= \sqrt{2} n \langle (E_{\text{trans}} - \frac{3}{2} k T_0) \mathbf{w} \rangle / n_0 k T_0 w_0 \\ \mathbf{b}_3 &= \sqrt{\frac{6}{5}} n \langle (E_{\text{rot}} - \frac{5}{2} k T_0) \mathbf{w} \rangle / n_0 k T_0 w_0 \\ \mathbf{b}_4 &= \frac{9}{10} n \langle \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) - \frac{1}{3} v^2 \mathbf{w} \rangle / n_0 v_0^2 w_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Diese Beziehungen erfordern nicht viel Kommentar. Zu (5.7) sei bemerkt, daß sich die beiden Temperaturen zur kinetischen Temperatur schlechthin zusammensetzen gemäß

$$T = \frac{1}{2} (T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}) \quad \text{oder} \quad 3kT = \langle E \rangle. \quad (5.11)$$

Die beiden Wärmeströme aus (5.9) setzen sich zum Gesamt-Wärmestrom gemäß

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\text{trans}} + \mathbf{q}_{\text{rot}} = n \langle (E - 4kT) \mathbf{v} \rangle$$

zusammen. Dies wird am Schluß des nächsten Paragraphen, bei der Diskussion der Energieerhaltung,

deutlich. Der Vektor \mathbf{a}_2 aus (5.9) ist das Maß für die mittlere „Azimutalpolarisation“ $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$; der polare Vektor \mathbf{a}_5 könnte als mittlere Longitudinalkomponente der Quadrupolarisation bezeichnet werden. Schließlich sei zu den Pseudogrößen bemerkt, daß der Pseudoskalar b_1 aus (5.8) ein Maß für die mittlere Longitudinalpolarisation ist, während die Axialvektoren $\mathbf{b}_{1,2,3}$ verschiedene gewichtete Mittelwerte der Polarisation (Winkelgeschwindigkeit) selbst sind. Der letzte Axialvektor \mathbf{b}_4 enthält als ersten Term den Strom an Longitudinalpolarisation.

§ 6. Entwicklung der Boltzmann-Gleichung

Die Entwicklung (5.1) der Verteilungsfunktion sei nun in die BOLTZMANN-Gleichung (1.1) eingesetzt. Indem man diese der Reihe nach mit Φ_i usw. multipliziert und über \mathbf{v} , \mathbf{w} integriert, entsteht ein System gekoppelter linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\langle \Phi_i v_r \Phi_{\lambda k} \rangle_0 &= \langle +0 i | v | -1 k \rangle \delta_{r\lambda} \\ \langle \Psi_i v_r \Psi_{\lambda k} \rangle_0 &= \langle -0 i | v | +1 k \rangle \delta_{r\lambda} \\ \langle \Phi_{\mu i} v_r \Phi_{\lambda k} \rangle_0 &= \langle +0 k | v | -1 i \rangle \delta_{\mu r}, \quad \langle \Phi_{\mu i} v_r \Psi_{\lambda k} \rangle_0 = \langle -1 i | v | +1 k \rangle \varepsilon_{\mu r \lambda} \\ \langle \Psi_{\mu i} v_r \Psi_{\lambda k} \rangle_0 &= \langle -0 k | v | +1 i \rangle \delta_{\mu r}, \quad \langle \Psi_{\mu i} v_r \Phi_{\lambda k} \rangle_0 = \langle -1 k | v | +1 i \rangle \varepsilon_{\lambda r \mu}.\end{aligned}$$

Hierin bezeichnet $\varepsilon_{\mu r \lambda}$ den isotropen antisymmetrischen Tensor dritter Stufe mit $\varepsilon_{123} = 1$, usw. Die Darstellung durch reduzierte Matrixelemente und die isotropen Tensoren ergibt sich unmittelbar aus der Drehinvarianz. Für die reduzierten Matrixelemente, deren Bezeichnung sich an Tab. 2 anlehnt, hat man auch

$$\langle +0 i | v | -1 k \rangle = \frac{1}{3} \langle \Phi_i \mathbf{v} \cdot \Phi_k \rangle_0 \quad (6.2)$$

$$\langle -0 i | v | +1 k \rangle = \frac{1}{3} \langle \Psi_i \mathbf{v} \cdot \Psi_k \rangle_0 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}\langle -1 i | v | +1 k \rangle &= \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu r \lambda} \langle \Phi_{\mu i} v_r \Psi_{\lambda k} \rangle_0 \\ &= \frac{1}{6} \langle [\Phi_i \times \mathbf{v}] \cdot \Psi_k \rangle_0.\end{aligned} \quad (6.4)$$

Die ersten beiden Beziehungen ergeben sich aus (6.1) sofort mittels $\delta_{rr} = 3$. Bei der letzten ist $\varepsilon_{\mu r \lambda} \varepsilon_{\mu r \lambda} = 6$ benutzt.

Es bleibt der letzte Term $\omega(f)$ der BOLTZMANN-Gleichung zu betrachten. Der Stoßoperator ω transformiert, weil er isotrop und paritätserhaltend ist, die irreduziblen Größen Φ_k , Ψ_k , Φ_k , Ψ_k jeweils in sich. Es sind also

$$\langle \Phi_i \omega(\Phi_k) \rangle_0 = \langle +0 i | \omega | +0 k \rangle = \omega_{+0}^{(ik)} \quad (6.5)$$

$$\langle \Psi_i \omega(\Psi_k) \rangle_0 = \langle -0 i | \omega | -0 k \rangle = \omega_{-0}^{(ik)} \quad (6.6)$$

$$\langle \Phi_i \cdot \omega(\Phi_k) \rangle_0 = \langle -1 i | \omega | -1 k \rangle = \omega_{-1}^{(ik)} \quad (6.7)$$

$$\langle \Psi_i \cdot \omega(\Psi_k) \rangle_0 = \langle +1 i | \omega | +1 k \rangle = \omega_{+1}^{(ik)} \quad (6.8)$$

erster Ordnung, die Transport-Relaxationsgleichungen, für die Entwicklungskoeffizienten a_i usw.

Das erste Glied $\partial f / \partial t$ der BOLTZMANN-Gleichung führt auf diese Weise, dank der Orthonormierung der Entwicklungsfunktionen Φ_i usw., ohne weiteres auf $\partial a_i / \partial t$ usw.

Bei der Behandlung des Konvektionsterms $\mathbf{v} \cdot (\partial f / \partial \mathbf{r})$ treten zunächst $4 \cdot 4 = 16$ Integrale auf. Aus Paritäts- bzw. Isotropiegründen verschwinden zehn davon. Zum Beispiel gilt

$$\langle \Phi_i \mathbf{v} \cdot \Phi_k \rangle = 0,$$

weil diese Funktion negative Parität hat (Φ_i , Φ_k sind +, \mathbf{v} ist -), und man hat aber z. B. auch

$$\langle \Phi_i \mathbf{v} \cdot \Psi_k \rangle = 0,$$

weil keine Raumrichtung ausgezeichnet ist. Sechs der Integrale sind im allgemeinen von Null verschieden, nämlich

$$\left. \begin{aligned}\omega_{+0}^{(ik)} &= \omega_{+0}^{(ki)} \text{ für } i, k = 1, 2, 3 \\ \omega_{-1}^{(ik)} &= \omega_{-1}^{(ki)} \text{ für } i, k = 1, 3, 4, 5 \\ \omega_{-1}^{(ik)} &= -\omega_{-1}^{(ki)} \text{ für } i = 2; k = 1, 3, 4, 5 \\ \omega_{+1}^{(ik)} &= \omega_{+1}^{(ki)} \text{ für } i, k = 1, 2, 3, 4.\end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

im allgemeinen von Null verschiedene (Relaxations-)Konstanten, während alle anderen Kombinationen, z. B. $\langle \Phi_i \omega(\Psi_k) \rangle_0$ usw., verschwinden. Es seien sogleich einige allgemeine Eigenschaften der Relaxationskonstanten notiert. Die Invarianz der Stoßgleichungen bei Bewegungsumkehr hatte (3.10) zur Folge. Daraus entnimmt man, an Hand der Spalten T aus Tab. 2, die folgenden ONSAGER-CASIMIR-Relationen

$$\left. \begin{aligned}\omega_{+0}^{(ik)} &= \omega_{+0}^{(ki)} \text{ für } i, k = 1, 2, 3 \\ \omega_{-1}^{(ik)} &= \omega_{-1}^{(ki)} \text{ für } i, k = 1, 3, 4, 5 \\ \omega_{-1}^{(ik)} &= -\omega_{-1}^{(ki)} \text{ für } i = 2; k = 1, 3, 4, 5 \\ \omega_{+1}^{(ik)} &= \omega_{+1}^{(ki)} \text{ für } i, k = 1, 2, 3, 4.\end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Ferner besagt die Teilchenerhaltung beim Stoß, daß $\omega(\Phi_1) = 0$ ist, also gilt

$$\omega_{+0}^{(i1)} = \omega_{+0}^{(1i)} = 0. \quad (6.10)$$

Die Energieerhaltung beim Stoß, Gl. (2.1), bedeutet, daß $\omega(\Phi_2 + \Phi_3) = 0$ ist, d. h.

$$\omega_{+0}^{(i2)} + \omega_{+0}^{(2i)} = 0. \quad (6.11)$$

Man hat also u. a.

$$\omega_{+0}^{(22)} = -\omega_{+0}^{(23)} = -\omega_{+0}^{(32)} = \omega_{+0}^{(33)}. \quad (6.12)$$

Dies ist, wie sich gegen Schluß dieses Paragraphen zeigen wird, bis auf einen Faktor 2 die Relaxations-

konstante von $T_{\text{trans}} - T_{\text{rot}}$, der inneren Temperaturdifferenz.

Schließlich sei bemerkt, daß alle $\omega^{(ik)}$ nach (2.4) positiv-definite Matrizen sind. Dies garantiert die Zunahme der Entropie.

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} + \sum_k (\langle +0 i | v | -1 k \rangle \operatorname{div} \mathbf{a}_k + \omega_{+0}^{(ik)} a_k) = 0 \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial t} + \sum_k (\langle -0 i | v | +1 k \rangle \operatorname{div} \mathbf{b}_k + \omega_{-0}^{(ik)} b_k) = 0 \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} + \sum_k (\langle +0 k | v | -1 i \rangle \operatorname{grad} a_k + \langle -1 i | v | +1 k \rangle \operatorname{rot} \mathbf{b}_k + \omega_{-1}^{(ik)} \mathbf{a}_k) = 0 \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial t} + \sum_k (\langle -0 k | v | +1 i \rangle \operatorname{grad} b_k - \langle -1 k | v | +1 i \rangle \operatorname{rot} \mathbf{a}_k + \omega_{+1}^{(ik)} \mathbf{b}_k) = 0. \quad (6.16)$$

Dies ist die gewünschte allgemeine Form der Transport-Relaxationsgleichungen¹⁰.

Um diesen eine greifbare Gestalt zu verleihen, benötigt man die Werte der reduzierten v -Matrixelemente. Allgemein werden sie sich durch CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten darstellen lassen; wir ziehen es vor, diejenigen v -Matrixelemente, welche zu den in Tab. 2 aufgeführten Größen gehören, direkt auszurechnen. Das gelingt mühelos, indem man die in (6.2 – 4) vorkommenden Produkte $\Phi_i \mathbf{v}$, $\Psi_i \mathbf{v}$, $\Phi_i \times \mathbf{v}$ wieder durch Φ , Ψ ausdrückt, so daß dann deren Orthonormierungseigenschaften nutzbar werden.

Nach Tab. 2 und nach (5.5) ist

$$\Phi_1 \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} v_0 \Phi_1$$

$$\Phi_2 \mathbf{v} = \frac{1}{3} v_0 (\sqrt{2} \Phi_1 + \sqrt{5} \Phi_3)$$

$$\Phi_3 \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} v_0 \Phi_4$$

$$\Psi_1 \mathbf{v} = \frac{1}{3} v_0 (\Psi_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_2 + \sqrt{\frac{10}{3}} \Psi_4)$$

$$\Phi_1 \times \mathbf{v} = \Phi_3 \times \mathbf{v} = \Phi_4 \times \mathbf{v} = 0$$

Damit ist nun die Entwicklung der BOLTZMANN-Gleichung (1.1) im Prinzip beendet, und man hat statt ihrer, gemäß der in (5.1) angeschriebenen Näherung bis zu Vektoren einschließlich, das gekoppelte System

$$\Phi_2 \times \mathbf{v} = \sqrt{\frac{2}{3}} v_0 (\Psi_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_2 - \sqrt{\frac{5}{6}} \Psi_4). \quad (6.17)$$

Und schließlich wird

$$\Phi_5 \times \mathbf{v} \propto (\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) \mathbf{V} \times \mathbf{W}.$$

Das ist ein Axialvektor von 4. Potenz, welcher orthogonal ist zu allen in Tab. 2 aufgeführten Vektoren. Die reduzierten v -Matrixelemente (6.2 – 4) lassen sich nun mittels der Orthogonalität und Normierung (4.2 und 3) sofort aufschreiben. Zusammengefaßt lautet das Ergebnis

für $i = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, 5$:

$$\langle +0 i | v | -1 k \rangle = \frac{v_0}{3} [\sqrt{3} \delta_{i1} \delta_{k1} + \delta_{i2} (\sqrt{2} \delta_{k1} + \sqrt{5} \delta_{k3}) + \sqrt{3} \delta_{i3} \delta_{k4}]$$

für $k = 1, \dots, 4$:

$$\langle -0 1 | v | +1 k \rangle = \frac{v_0}{3} (\delta_{k1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{k2} + \sqrt{\frac{10}{3}} \delta_{k4})$$

für $i = 1, \dots, 5$, $k = 1, \dots, 4$:

$$\langle -1 i | v | +1 k \rangle = \frac{v_0}{\sqrt{6}} \delta_{i2} (\delta_{k1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{k2} - \sqrt{\frac{5}{6}} \delta_{k4}).$$

Damit nehmen die Gln. (6.13 – 16), in den Größen bis zur 3. Potenz einschließlich (Tab. 2), die folgende detaillierte Form an:

a) Skalare

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{v_0}{3} \operatorname{div} \sqrt{3} \mathbf{a}_1 &= 0 \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{v_0}{3} \operatorname{div} (\sqrt{2} \mathbf{a}_1 + \sqrt{5} \mathbf{a}_3) + \omega_{+0}^{(22)} (a_2 - a_3) &= 0 \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} + \frac{v_0}{3} \operatorname{div} \sqrt{3} \mathbf{a}_4 - \omega_{+0}^{(22)} (a_2 - a_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

¹⁰ Die früheren Transport-Relaxationsgleichungen für das LORENTZ-Gas aus Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen¹ ordnen sich dem obigen Schema ein. Beim Vergleich im einzelnen ist zu beachten,

dass früher etwas andere Vektoren als in Tab. 2 verwendet und einheitliche Teilchengeschwindigkeit (an Stelle der MAXWELL-Verteilung) angenommen wurden.

b) Pseudoskalär

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial t} + \frac{v_0}{3} \operatorname{div}(\mathbf{b}_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{b}_2 + \sqrt{\frac{10}{3}} \mathbf{b}_4) + \omega_{-0}^{(11)} b_1 = 0 \quad (6.18)$$

c) Polare Vektoren

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial t} + \frac{v_0}{3} \operatorname{grad}(\sqrt{3} \mathbf{a}_1 + \sqrt{2} \mathbf{a}_2) &+ \sum_1^5 \omega_{-1}^{(1k)} \mathbf{a}_k = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial t} &+ \frac{v_0}{\sqrt{6}} \operatorname{rot}(\mathbf{b}_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{b}_2 - \sqrt{\frac{5}{6}} \mathbf{b}_4) + \sum_1^5 \omega_{-1}^{(2k)} \mathbf{a}_k = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial t} + \frac{v_0}{3} \operatorname{grad} \sqrt{5} \mathbf{a}_2 &+ \sum_1^5 \omega_{-1}^{(3k)} \mathbf{a}_k = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{a}_4}{\partial t} + \frac{v_0}{3} \operatorname{grad} \sqrt{3} \mathbf{a}_3 &+ \sum_1^5 \omega_{-1}^{(4k)} \mathbf{a}_k = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{a}_5}{\partial t} &+ \sum_1^5 \omega_{-1}^{(5k)} \mathbf{a}_k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

d) Axialvektoren

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial t} + \frac{v_0}{3} \operatorname{grad} b_1 &- \frac{v_0}{\sqrt{6}} \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 + \sum_1^4 \omega_{+1}^{(1k)} \mathbf{b}_k = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial t} + \frac{v_0}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 &- \frac{v_0}{\sqrt{6}} \operatorname{rot} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{a}_2 + \sum_1^4 \omega_{+1}^{(2k)} \mathbf{b}_k = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{b}_3}{\partial t} &+ \sum_1^4 \omega_{+1}^{(3k)} \mathbf{b}_k = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{b}_4}{\partial t} + \frac{v_0}{3} \operatorname{grad} \sqrt{\frac{10}{3}} b_1 &+ \frac{v_0}{\sqrt{6}} \operatorname{rot} \sqrt{\frac{5}{6}} \mathbf{a}_2 + \sum_1^4 \omega_{+1}^{(4k)} \mathbf{b}_k = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Zu einer vorläufigen Diskussion dieser Gleichungen seien die ersten vier davon umgeschrieben unter Verwendung der in (5.7–10) notierten Interpretation der Entwicklungskoeffizienten. Man erhält statt (6.17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{\mathbf{j}} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} n k T_{\text{trans}} + \operatorname{div}(\mathbf{q}_{\text{trans}} + \frac{5}{2} k T \hat{\mathbf{j}}) + \omega_{+0}^{(22)} \cdot \frac{3}{2} n k (T_{\text{trans}} - T_{\text{rot}}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} n k T_{\text{rot}} + \operatorname{div}(\mathbf{q}_{\text{rot}} + \frac{3}{2} k T \hat{\mathbf{j}}) - \omega_{+0}^{(22)} \cdot \frac{3}{2} n k (T_{\text{trans}} - T_{\text{rot}}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.17a)$$

Die erste Beziehung ist die Kontinuitätsgleichung. Die beiden letzten Gleichungen ergeben addiert den Energiesatz

$$\frac{\partial}{\partial t} 3 n k T + \operatorname{div}(\mathbf{q} + 4 k T \hat{\mathbf{j}}) = 0. \quad (6.17b)$$

Ihre Subtraktion liefert die Transport-Relaxationsgleichung der inneren Temperaturdifferenz

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} n k (T_{\text{trans}} - T_{\text{rot}}) + \operatorname{div}(\mathbf{q}_{\text{trans}} - \mathbf{q}_{\text{rot}} + k T \hat{\mathbf{j}}) + 2 \omega_{+0}^{(22)} \cdot \frac{3}{2} n k (T_{\text{trans}} - T_{\text{rot}}) = 0. \quad (6.17c)$$

Somit ist $2 \omega_{+0}^{(22)}$ die Relaxationskonstante der inneren Temperaturdifferenz. Aus (6.18) schließlich entsteht mittels (5.8 und 10)

$$\frac{\partial}{\partial t} n \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle + \operatorname{div} n \langle \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \rangle + \omega_{-0}^{(11)} n \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle = 0. \quad (6.18a)$$

Diese Gleichung lässt $\omega_{-0}^{(11)}$ als die Relaxationskonstante der mittleren Longitudinalpolarisation erkennen.

Die physikalische Bedeutung einiger weiterer Relaxationskonstanten oder von deren Kombinationen wird sich im nächsten Paragraphen ergeben.

III. Anwendungen und Diskussion

§ 7. Diffusion, Wärmeleitung und die damit verknüpfte Azimutalpolarisation

Die Transport-Relaxationsgleichungen (6.17 – 20) seien jetzt diskutiert im stationären Fall – keine Zeitabhängigkeit –, für gegebenen Konzentrations- und Temperaturgradienten und weit weg von der Oberfläche (keine Randphänomene).

Die letztgenannte Voraussetzung hat zur Folge, daß alle Pseudogrößen b_i , \mathbf{b}_i verschwinden. Um das zu sehen, bildet man von den Gleichungen (6.20) die Divergenz und löst nach den $\operatorname{div} \mathbf{b}_k$ auf. Diese sind dann sämtlich durch Δb_1 dargestellt. Damit geht man in (6.18) ein und erhält eine Gleichung der Form $\Delta b_1 - \alpha b_1 = 0$, wo α positiv ist (wegen der Positiv-Definitheit der $\omega^{(ik)}$). Dies bedeutet exponentielles Abklingen von b_1 und damit aller anderen Pseudogrößen vom Rand nach dem Inneren zu, also Verschwinden weit weg von der Oberfläche.

Ferner ergibt sich aus (6.17), daß $\operatorname{grad} a_2 \approx \operatorname{grad} a_3$ gesetzt werden darf, d. h. nach (5.7), daß der Gradient der inneren Temperaturdifferenz $T_{\text{trans}} - T_{\text{rot}}$ vernachlässigbar ist. Denn es ist

$$\operatorname{grad}(a_2 - a_3) \propto \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}_3 \text{ oder } 4,$$

was als zweite Ableitung weit weg von der Oberfläche beliebig klein ist.

So bleiben für das Diffusions-Wärmeleitproblem nur die Gln. (6.19) übrig, welche die Gestalt annehmen

$$\left. \begin{array}{l} \frac{v_0}{3} \operatorname{grad} (\sqrt{3} a_1 + \sqrt{2} \bar{a}) + \sum_1^5 \omega_{-1}^{(1k)} \mathbf{a}_k = 0 \\ \quad \sum \omega_{-1}^{(2k)} \mathbf{a}_k = 0 \\ \frac{v_0}{3} \operatorname{grad} \sqrt{5} \bar{a} + \sum \omega_{-1}^{(3k)} \mathbf{a}_k = 0 \\ \frac{v_0}{3} \operatorname{grad} \sqrt{3} \bar{a} + \sum \omega_{-1}^{(4k)} \mathbf{a}_k = 0 \\ \quad \sum \omega_{-1}^{(5k)} \mathbf{a}_k = 0. \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

Hierbei ist $\bar{a} = \frac{1}{2} (a_2 + a_3)$ nach (5.7) bis auf einen Faktor die lokale Gasttemperatur. Und a_1 , wieder nach (5.7), bedeutet im wesentlichen die Konzentration des Gases. Somit liefert das System (7.1), nach den Strömen \mathbf{a}_k aufgelöst, diese Ströme als lineare Funktionen des Konzentrations- und Temperaturgradienten. Damit ist das Diffusions-Wärmeleitproblem im Prinzip gelöst.

Um die gebräuchlichen Transportkonstanten aus (7.1) abzulesen, sei zunächst durch

$$n = n_s \gamma \quad (7.2)$$

der Molenbruch durchgeführt. Durch die Verfügung

$$\operatorname{grad}(n_s T) = 0 \quad (7.3)$$

wird die Konstanz des Gesamtdrucks, zu welchem die seltenen Teilchen ($\gamma \ll 1$) praktisch nichts beitragen, garantiert. Auf diesen Fall (keine Druckdiffusion) sei das Folgende beschränkt. Nach (5.7) ist dann

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \left(a_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{a} \right) &= \frac{1}{T_0} \operatorname{grad} n T \\ &= \frac{1}{T_0} n_s T \operatorname{grad} \gamma = n_s \operatorname{grad} \gamma \end{aligned} \quad (7.4)$$

für $T = T_0$. Ferner ist nach (5.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{a} &= \frac{1}{T_0} \operatorname{grad} n (T - T_0) \\ &= \frac{1}{T_0} n_s T \operatorname{grad} \gamma - \operatorname{grad} n. \end{aligned}$$

Dies kann noch umgeformt werden mittels

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} n &= n_s T \operatorname{grad} \gamma T^{-1} \\ &= n_s \operatorname{grad} \gamma - n T^{-1} \operatorname{grad} T \end{aligned}$$

und gibt für $T = T_0$

$$\operatorname{grad} \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{a} = \frac{1}{T_0} n \operatorname{grad} T. \quad (7.5)$$

Schließlich sei die zu ω_{-1} gehörige Umkehrmatrix (Weglängenmatrix) l_{-1} eingeführt gemäß

$$(\omega_{-1})^{-1} = \frac{1}{v_0} l_{-1}. \quad (7.6)$$

Mit (7.4 – 6) und unter Benutzung von (5.9) erhält man so aus (7.1) nach kurzen Umformungen für Teilchen- und Wärmestrom

$$\mathbf{j} = -n_s D \left(\operatorname{grad} \gamma + \gamma \alpha \cdot \frac{1}{T_0} \operatorname{grad} T \right) \quad (7.7)$$

$$\mathbf{q} = \alpha k T_0 \mathbf{j} - \lambda \operatorname{grad} T \quad (7.8)$$

mit der Diffusionskonstanten

$$D = \frac{1}{3} v_0 l_{-1}^{(11)}, \quad (7.9)$$

dem Thermodiffusionsfaktor

$$\alpha = -(\sqrt{5} l_{-1}^{(13)} + \sqrt{3} l_{-1}^{(14)}) / \sqrt{2} l_{-1}^{(11)} \quad (7.10)$$

und der Wärmeleitkonstanten

$$\lambda = \frac{1}{3} v_0 k n [-l_{-1}^{(11)} \alpha^2 + \frac{1}{2} (5 l_{-1}^{(33)} + \sqrt{15} l_{-1}^{(34)} + 3 l_{-1}^{(44)})]. \quad (7.11)$$

Für die mittlere Azimutalpolarisation ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle}{v_0 w_0} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{l_{-1}^{(21)}}{l_{-1}^{(11)}} \mathbf{j}/n v_0 \\ &+ \frac{1}{3\sqrt{3}} (\sqrt{2} l_{-1}^{(21)} \alpha + \sqrt{5} l_{-1}^{(23)} + \sqrt{3} l_{-1}^{(24)}) \frac{1}{T_0} \text{grad } T. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Auf das Anschreiben der beiden noch fehlenden Gleichungen, derjenigen für $\mathbf{q}_{\text{trans}} - \mathbf{q}_{\text{rot}}$ und \mathbf{a}_5 , sei verzichtet, da sie im folgenden nicht diskutiert werden.

Es sei noch die mittlere Winkelgeschwindigkeit $\bar{\mathbf{w}}$ der Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit \mathbf{v} betrachtet:

$$\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \int \mathbf{w} f d^3w / \int f d^3w. \quad (7.13)$$

Beim Einsetzen der Entwicklung (5.1) verschwindet eine Reihe von Termen. Es ist

$$\begin{aligned} \int \mathbf{W} f_0 \{ \Phi_{1,2,3}, \Phi_1, \Phi_3, \dots \} d^3w &= 0 \\ \int f_0 \{ \Phi_3, \Phi_2, \Phi_{4,5} \} d^3w &= 0. \end{aligned}$$

Bei den ersten ist nämlich der Integrand ungerade in \mathbf{w} . Bei den letzteren gilt dasselbe für das Φ_2 -haltige Integral; das Φ_3 - und das Φ_4 -haltige Integral hat nach Tab. 2 den Faktor $W^2 - \frac{3}{2}$ im Integranden und verschwindet daher; das Φ_5 -haltige Integral verschwindet, weil in ihm der irreduzible Tensor 2. Stufe in w vorkommt. Nun zu den nicht-verschwindenden Termen. Es ist nach (2.2) und (4.1)

$$\int f_0 d^3w = A \pi^{-\frac{3}{2}} e^{-W^2} d^3W$$

mit der Abkürzung

$$A = n_0 (m/2 \pi k T_0)^{\frac{3}{2}} e^{-V^2}.$$

An Hand der Formeln (A 1 und 2) des Anhangs erhält man sogleich zum einen

$$\int W_\mu f_0 \Phi_{r2} d^3w = \frac{1}{V^2} A \epsilon_{\mu\nu\lambda} V_\lambda$$

und zum anderen

$$\int f_0 \{ \Phi_1, \Phi_2, \Phi_1, \Phi_3 \} d^3w = A \{ \Phi_1, \Phi_2, \Phi_1, \Phi_3 \}.$$

Damit kommt

$$\bar{\mathbf{W}}(\mathbf{V}) = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{V}}{V^2 (1 + a_1 + a_2 + \Phi_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \Phi_3 \cdot \mathbf{a}_3)} \quad (7.14)$$

die Stoßgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= -(1+K)^{-1} [(-1+K) \mathbf{V} + 2\sqrt{K} \mathbf{k} \times \mathbf{W} + 2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})] \\ \mathbf{W}' &= (1+K)^{-1} [(-1+K) \mathbf{W} + 2\sqrt{K} \mathbf{k} \times \mathbf{V} + 2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{W})]. \end{aligned}$$

oder nach (5.5, 7 und 9), unter Vernachlässigung von a_2 und \mathbf{a}_3 ,

$$\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \frac{3}{2} w_0 \frac{\langle \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle \times \mathbf{v} / v_0^2 w_0}{1 + (3 \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} / n v_0^2)}. \quad (7.14a)$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{v})$ ist also senkrecht zur Lineargeschwindigkeit und zur mittleren Azimutalpolarisation. Letztere hat gemäß (7.12) die Richtung des Diffusionsstroms bzw. des Temperaturgradienten. Die Koeffizienten $l_{-1}^{(2k)}$ sind maßgebend für die Größe der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{v})$. Sie sollte meßbar sein an Molekülen, die seitlich aus dem Diffusions- oder Wärmestrom austreten. Das wurde schon bei der Betrachtung der Diffusion von Spinteilchen bemerkt^{1, 2}.

§ 8. Berechnung einiger Relaxationskonstanten für die rauen Kugeln

Die bisherigen Betrachtungen gelten allgemein für klassische kugelsymmetrische Moleküle. Jetzt seien einige Relaxationskonstanten tatsächlich berechnet für das Modell der rauen Kugeln.

Die Streuer, harte rauhe Kugeln vom Durchmesser d_s , sollen fixiert sein (Masse und Trägheitsmoment unendlich groß). Die seltenen, beweglichen Moleküle, harte rauhe Kugeln vom Durchmesser d , sollen die Masse m und das Trägheitsmoment Θ besitzen. Die einfachste Wahl für den Radius der Wirkungskugel ist dann

$$R = \frac{1}{2} (d + d_s). \quad (8.1)$$

Diese Wahl sei im folgenden getroffen. Es gilt dann $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ (vgl. Abb. 1). Die Erhaltung des Drehimpulses bezüglich des Berührpunktes besagt

$$\frac{1}{2} d \mathbf{k} \times m \mathbf{v}' + \Theta \mathbf{w}' = \frac{1}{2} d \mathbf{k} \times m \mathbf{v} + \Theta \mathbf{w}.$$

Dazu kommt als Reflexionsbedingung der rauen Kugeln (Umschlagen der Geschwindigkeit des berührenden Punktes der beweglichen Kugel)

$$\mathbf{v}' - \mathbf{w}' \times \frac{1}{2} d \mathbf{k} = -\mathbf{v} + \mathbf{w} \times \frac{1}{2} d \mathbf{k}.$$

Aus beidem ergeben sich für die dimensionslosen Geschwindigkeiten aus (4.1) mit der Abkürzung

$$K = \frac{4 \Theta}{m d^2} \quad (8.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}' &= -(1+K)^{-1} [(-1+K) \mathbf{V} + 2\sqrt{K} \mathbf{k} \times \mathbf{W} + 2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})] \\ \mathbf{W}' &= (1+K)^{-1} [(-1+K) \mathbf{W} + 2\sqrt{K} \mathbf{k} \times \mathbf{V} + 2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{W})]. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Energiesatz sowie Spiegelungs- und Bewegungs-umkehr-Invarianz sind erfüllt. Ferner hat man hier

$$\mathbf{V}' \cdot \mathbf{W}' = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \quad (8.3a)$$

sowie

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}' = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{W}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{W}.$$

Für den Stoßoperator (1.6b) werde jetzt geschrieben

$$\omega(\Phi) = \omega_0 V \int_{+} (\Phi - \Phi') d\Omega, \quad (8.4)$$

Hier ist das Ergebnis für einige davon:

$$\omega(\Phi_1) = 0$$

$$\omega(\Phi_2) = -\omega(\Phi_3) = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_0 K (1+K)^{-2} [2V^4 - 3V^2 W^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{W})^2] V^{-1}$$

$$\omega(\Psi_1) = \frac{4}{V^3} \omega_0 V \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}$$

$$\omega(\Phi_1) = \omega_0 (1+K)^{-1} [\frac{4}{3} V \bar{K} \Phi_2 + (1+2K) V 2 V \mathbf{V}]$$

$$\begin{aligned} \omega(\Phi_2) = \omega_0 (1+K)^{-2} & \left[\frac{8}{3} V \bar{K} \left[-\frac{1+K}{2} \Phi_1 - \sqrt{\frac{2}{5}} \Phi_3 + \frac{1-K}{\sqrt{6}} \Phi_4 + \frac{1}{2\sqrt{30}} (1+5K) \Phi_5 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{V^2} (1+K+4K^2) V \mathbf{V} \times \mathbf{W} \right] \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\omega(\Psi_1) = \frac{1}{V^2} \omega_0 (1+K)^{-1} [3V \mathbf{W} - \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) V^{-1}].$$

Bei der Berechnung der zugehörigen Relaxationskonstanten (6.5–8) kann z. Tl. direkt die Orthonormierung (4.5 und 6) der Entwicklungsfunktionen ausgenutzt werden. Dies ist bei denjenigen Gliedern der Fall, welche auf den rechten Seiten von (8.7) durch die Entwicklungsfunktionen selbst ausgedrückt sind. Für die übrigen hat man die Formeln (A 8–10) des Anhangs zu benutzen. So findet man

$$\begin{aligned} \omega_{+0}^{(22)} &= \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \omega_0 K (1+K)^{-2} \\ \omega_{-0}^{(11)} &= \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \omega_0 \\ \omega_{-1}^{(11)} &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \omega_0 (1+K)^{-1} (1+2K) \\ \omega_{-1}^{(21)} &= \frac{4}{3} \omega_0 (1+K)^{-1} V \bar{K} \\ \omega_{-1}^{(22)} &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \omega_0 (1+K)^{-2} (1+K+4K^2) \\ \omega_{+1}^{(11)} &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \omega_0 (1+K)^{-1}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Hierzu sei im Moment nur bemerkt, daß also die Relaxationskonstante $\omega_{-0}^{(11)}$ der mittleren Longitudinalpolarisation, vgl. (6.18a), von K , d. h. dem Trägheitsmoment, unabhängig ist. Dies ist natürlich eine Besonderheit der rauen Kugeln und geht direkt auf

wobei, vgl. (5.5),

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \pi n_s R^2 v_0 \quad (8.5)$$

und

$$d\Omega = \frac{1}{\pi} \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} d^2 k, \quad \mathbf{e} = \mathbf{v}/v = \mathbf{V}/V. \quad (8.6)$$

Mittels der Hilfsformeln (B 7–11) des Anhangs kann $\omega(\Phi)$ für die in Tab. 2 aufgeführten Funktionen berechnet werden.

den „Anti-Erhaltungssatz“ (8.3a) zurück. – Weitere Gesichtspunkte werden sich im nächsten Paragraphen ergeben.

§ 9. Einfachste nicht-isotrope Näherung für die Diffusion von rauen Kugeln

In § 7 wurde das Diffusions- und Wärmeleitproblem allgemein behandelt. Um das letztere zu umfassen, war es nötig, bei der Auswahl der Entwicklungsfunktionen, Tab. 2, mindestens bis zu Gliedern der 3. Potenz zu gehen. Wenn es einem nur um die Diffusion zu tun ist, so kann man sich zunächst mit den Gliedern bis zur 1. Potenz begnügen. Das System (7.1) reduziert sich dann im isothermen Fall unter Beachtung von (7.5), auf die einzige Gleichung

$$\sqrt{3} v_0 \operatorname{grad} a_1 + \omega_{-1}^{(11)} \mathbf{a}_1 = 0 \quad (9.1)$$

und man erhält für die Diffusionskonstante

$$D_{\text{isotrop}} = \frac{1}{3} v_0^2 / \omega_{-1}^{(11)}. \quad (9.2)$$

Der Index „isotrop“ soll darauf hinweisen, daß die zugrunde liegende Verteilungsfunktion, da sie nur aus Φ_1 und \mathbf{k} aufgebaut ist, keine Orientierung der Molekülrotation kennt. Nach (8.8) ist also für

die rauen Kugeln

$$\left. \begin{aligned} D_{\text{isotrop}} &= D_{1-\text{atomig}} \cdot \frac{1+K}{1+2K}, \\ \text{wo} \quad D_{1-\text{atomig}} &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{v_0^2}{\omega_0} = \frac{3\sqrt{kT_0/2\pi m}}{8n_s[(d+d_s)/2]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Letzteres ist tatsächlich der Diffusionskoeffizient des einatomigen LORENTZ-Gases aus starren Kugeln (in der entsprechenden Näherung). Die Formel (9.3) findet man in der bisherigen Literatur¹¹, in welcher Orientierungseffekte ignoriert wurden. Zum Vergleich mit dem Späteren sei (9.3) auch in der Form geschrieben

$$\left. \begin{aligned} D_{\text{isotrop}} &= D_{1-\text{atomig}} / (1 + \delta_1) \\ \text{mit} \quad \delta_1 &= K / (1 + K) \end{aligned} \right\} \quad (9.3a)$$

oder in Zahlenwerten

K	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	∞
δ_1	0	0,25	0,4	0,5	1

Um die Orientierungseffekte zu berücksichtigen, hat man mindestens die Glieder bis zur 2. Potenz aus Tab. 2 mitzunehmen und aus (7.1) im isothermen Fall als einfachste, nicht-isotrope Näherung das System herauszugreifen

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{3} v_0 \operatorname{grad} \alpha_1 + \omega_{-1}^{(11)} \mathbf{a}_1 + \omega_{-1}^{(12)} \mathbf{a}_2 &= 0 \\ \omega_{-1}^{(21)} \mathbf{a}_1 + \omega_{-1}^{(22)} \mathbf{a}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Durch die Hinzunahme von \mathbf{a}_2 , was bis auf einen Faktor die mittlere Azimutalpolarisation mißt, vgl. (5.9), ist jetzt etwas von der Orientierung berücksichtigt. Zur Auflösung von (9.4) dient die Weglängenmatrix l_{-1} , vgl. (7.6), welche in der jetzigen Näherung lautet

$$\begin{pmatrix} l_{-1}^{(11)} & l_{-1}^{(12)} \\ l_{-1}^{(21)} & l_{-1}^{(22)} \end{pmatrix} = \frac{v_0}{\omega_{-1}^{(11)} \omega_{-1}^{(22)} - \omega_{-1}^{(12)} \omega_{-1}^{(21)}} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{-1}^{(22)} - \omega_{-1}^{(12)} \\ -\omega_{-1}^{(21)} & \omega_{-1}^{(11)} \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Damit erhält man für die Diffusionskonstante, welche allgemein durch (7.9) gegeben ist,

$$D = D_{\text{isotrop}} / (1 + \delta_2), \quad (9.6)$$

wobei D_{isotrop} aus (9.3) bekannt ist und die Abkürzung

$$\delta_2 = (\omega_{-1}^{(12)})^2 / \omega_{-1}^{(11)} \omega_{-1}^{(22)} > 0 \quad (9.7)$$

eingeführt wurde.

Speziell für die rauen Kugeln ist nach (8.8)

$$\delta_2 = \frac{\pi K(1+K)}{2(1+2K)(1+K+4K^2)}. \quad (9.7a)$$

Die Größe der an D_{isotrop} anzubringenden Korrektur wird an den Zahlenwerten deutlich

K	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	∞
δ_2	0	0,236	0,218	0,174	0

Der Vergleich mit den zu (9.3a) gehörigen Zahlenwerten zeigt, daß bei nicht zu großem Trägheitsmoment ($K \lesssim 1$) die durch den Orientierungseffekt bewirkte Korrektur (δ_2) am Diffusionskoeffizienten von ähnlicher Größe ist wie diejenige (δ_1), welche die Isotropienäherung bewirkt an dem nach der einatomigen Theorie berechneten Wert. Die Isotropienäherung für sich allein ist also in der Tat nicht konsequent und mit Vorsicht zu gebrauchen.

Auflösen von (9.4) ergibt nun aber auch die mit der Diffusion einhergehende mittlere Azimutalpolarisation. Man entnimmt aus der zweiten Gl. (9.4), unter Benutzung von (5.9),

$$\frac{\langle \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle}{v_0 w_0} = -\beta \mathbf{j} / n v_0, \quad (9.8)$$

wobei

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\omega_{-1}^{(21)}}{\omega_{-1}^{(22)}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\omega_{-1}^{(12)}}{\omega_{-1}^{(11)}}. \quad (9.9)$$

Dies muß mit der entsprechenden Näherung von (7.12) übereinstimmen. In der Tat gilt nach (9.5)

$$-\frac{\omega_{-1}^{(21)}}{\omega_{-1}^{(22)}} = \frac{l_{-1}^{(21)}}{l_{-1}^{(11)}},$$

so daß (9.8) mit (7.12) gleichlautet, sofern dort der Temperaturgradient unberücksichtigt bleibt.

Bei den rauen Kugeln gilt nach (8.8)

$$\beta = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} K(1+K) / (1+K+4K^2), \quad (9.9a)$$

oder in Zahlenwerten

K	≈ 0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	∞
β	$\approx 1,45 \sqrt{K}$	0,63	0,58	0,48	0

Der polare Vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ist also im Mittel entgegengesetzt wie der Diffusionsstrom gerichtet. Dies entspricht anschaulich der Rotation, welche den beim rauen Stoß quer zur Diffusionsrichtung abgelenkten Molekülen erteilt wird (Abb. 2).

Zum Abschluß sei die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}(\mathbf{v})$ der Teilchen mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} be-

¹¹ S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press 1939, S. 214.

trachtet. Einsetzen von $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle$ aus (9.8) in (7.14a) ergibt, unter Benutzung von (5.5),

$$\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{2}\beta w_0 \mathbf{j} \times \mathbf{v} / \left(n \frac{k T_0}{m} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \right).$$

Wenn \mathbf{v} senkrecht zu \mathbf{j} ist und $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \gg n k T_0 / m$ gilt, d. h. wenn ein starker Diffusionsstrom herrscht¹²

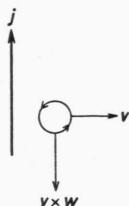


Abb. 2. Rotation und Azimutalpolarisation $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, welche den Molekülen bei Ablenkung quer zum Diffusionsstrom \mathbf{j} durch rauen Stoß erteilt werden.

oder schnelle Teilchen herausgegriffen werden, gilt also

$$\left| \frac{\bar{w}}{w_0} \right| \approx \frac{1}{2} |\beta|, \quad (9.10)$$

was für $K = \frac{1}{3}$ etwa 0,3 beträgt. Dies bedeutet etwa 30-proz. Polarisation. Würden nämlich alle Teilchen um die gleiche Achse rotieren, d. h. vollständig polarisiert sein mit MAXWELLSCH-verteilter Rotationsenergie, so hat man für den mittleren Betrag von \bar{W}

$$\bar{W}_{\text{pol}} = \int W e^{-W^2} d^3W / \int e^{-W^2} d^3W = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Also wäre die mittlere Winkelgeschwindigkeit dieser Teilchen

$$\bar{w}_{\text{pol}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{W}_{\text{pol}} w_0 = 0,92 w_0,$$

und die Abschätzung (9.10) gilt praktisch auch für $(\bar{w}/\bar{w}_{\text{pol}})$. — Ähnliche Verhältnisse werden für das wärmeleitende Gas zutreffen.

IV. Anhang

Es seien die Hilfsformeln zusammengestellt, welche in § 4 bei der Berechnung der Normierungsfaktoren aus Tab. 2 und in § 8 bei der Auswertung des Stoßintegrals für die rauen Kugeln benutzt worden sind.

A. Hilfsformeln für die Berechnung von Mittelwerten im Phasenraum

Nach (2.3) und (4.1) ist

$$\langle \Phi \rangle_0 = \pi^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-V^2 - W^2} \Phi(\mathbf{V}, \mathbf{W}) d^3V d^3W.$$

¹² Für diesen Fall ist allerdings die Entwicklung (5.1) im Grunde nicht mehr anwendbar.

Alle Normierungsintegrale aus (4.2) und, durch Benutzung der Drehinvarianz, auch diejenigen aus (4.3) können reduziert werden auf ein (oder mehrere) Integrale vom obigen Typ über Potenzprodukte der Form

$$\Phi^{(pqr)} = V^{2p} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{W})^q W^{2r} \quad \text{mit } p, q, r = 0, 1, 2, \dots$$

Deren Mittelwerte können offenbar dargestellt werden gemäß

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{(pqr)} \rangle_0 &= \langle \Phi^{(rqp)} \rangle_0 \\ &= (-)^{p+q+r} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^q \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \right)^r F(\alpha, \beta, \gamma) \right]_{\alpha=\gamma=1, \beta=0} \end{aligned} \quad (\text{A } 1)$$

wobei

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \pi^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha V^2 - 2\beta \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} - \gamma W^2\} d^3V d^3W.$$

Die Funktion F lässt sich leicht explizit angeben; es ist

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \gamma - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (\text{A } 2)$$

Zum Beweis formt man den Exponenten um gemäß

$$\alpha V^2 + 2\beta \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} + \gamma W^2 = \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} \right) V^2 + \gamma U^2,$$

wo

$$\mathbf{U} = \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{V} + \mathbf{W}.$$

Da

$$d^3V d^3W = d^3V d^3U,$$

ist also auch

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \pi^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}\right) V^2 - \gamma U^2\right] d^3V d^3U,$$

woraus sich wegen

$$\pi^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda V^2} d^3V = \lambda^{-\frac{3}{2}}$$

sofort die Behauptung ergibt.

Bei der Berechnung der Relaxationskonstanten der rauen Kugeln an Hand von (8.7) und (6.5–8) treten auch Potenzprodukte der Form $\Phi^{(pqr)} V^{-1}$ auf. Ihre Mittelwerte ergeben sich gemäß

$$\langle \Phi^{(pqr)} V^{-1} \rangle_0 = (-)^{p+q+r} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^q \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \right)^r G(\alpha, \beta, \gamma) \right]_{\alpha=\gamma=1, \beta=0}, \quad (\text{A } 3)$$

wo

$$G(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$\pi^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha V^2 - 2\beta \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} - \gamma W^2\} V^{-1} d^3V d^3W.$$

Explizit gilt

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = 2(\pi \gamma)^{-\frac{1}{2}} (\alpha \gamma - \beta^2)^{-1}. \quad (\text{A } 4)$$

Dies beweist man analog wie vorher unter Benutzung von

$$\pi^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda V^2} V^{-1} d^3V = 2\pi^{\frac{1}{2}} \lambda^{-1}.$$

Aus (A 1 und 2) entnimmt man nun sofort

$$\langle \Phi^{(pqr)} \rangle_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p+1)}{2^p} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r+1)}{2^r} \quad (\text{A } 5)$$

und ferner nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned}\langle \Phi^{(p2r)} \rangle_0 &= \frac{1}{3} \langle \Phi^{(p+1, 0, r+1)} \rangle_0 \\ \langle \Phi^{(p4r)} \rangle_0 &= \frac{1}{5} \langle \Phi^{(p+2, 0, r+2)} \rangle_0.\end{aligned}\quad (\text{A } 6)$$

Allgemein ist

$$\langle \Phi^{(pqr)} \rangle_0 = 0 \quad \text{für ungerade } q, \quad (\text{A } 7)$$

weil der Integrand ungerade in \mathbf{V} (und \mathbf{W}) ist.

Aus (A 3 und 4) entnimmt man ferner sofort

$$\langle \Phi^{(p0r)} V^{-1} \rangle_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} p! \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r+1)}{2^r} \quad (\text{A } 8)$$

und auch wieder

$$\begin{aligned}\langle \Phi^{(p2r)} V^{-1} \rangle_0 &= \frac{1}{3} \langle \Phi^{(p+1, 0, r+1)} V^{-1} \rangle_0 \\ \langle \Phi^{(p4r)} V^{-1} \rangle_0 &= \frac{1}{5} \langle \Phi^{(p+2, 0, r+2)} V^{-1} \rangle_0.\end{aligned}\quad (\text{A } 9)$$

Allgemein ist

$$\langle \Phi^{(pqr)} V^{-1} \rangle_0 = 0 \quad \text{für ungerade } q. \quad (\text{A } 10)$$

Damit sind alle benötigten Integrale bereitgestellt.

B. Hilfsformeln für die Berechnung von Integralen über die halbe Einheitskugel

Bei der Auswertung des Stoßintegrals (8.4 mit 6) treten Integrale über die halbe Einheitskugel auf den

$$\begin{aligned}H^{(n)} &= \pi^{-1} r^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\sin \Theta \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \Theta \cos \vartheta)^n \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= r^n \sum_m \binom{n}{m} a_{nm} c_m \cos^{n-m} \Theta \sin^m \Theta,\end{aligned}$$

wobei

$$a_{nm} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+1} \vartheta \cos^{n-m+1} \vartheta d\vartheta \quad \text{und} \quad c_m = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi d\varphi.$$

Daraus ergibt sich z. B.

$$H^{(4)} = r^4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cos^4 \Theta + \frac{1}{2} \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + \frac{1}{8} \sin^4 \Theta \right)$$

$$H^{(3)} = r^3 \cdot \frac{2}{5} \cos \Theta$$

oder wieder vektoriell geschrieben

$$H^{(4)} = \frac{1}{8} r^4 + \frac{1}{4} r^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^2 - \frac{1}{24} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^4 \quad (\text{B } 5)$$

$$H^{(3)} = \frac{2}{5} r^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}. \quad (\text{B } 6)$$

An Hand von $H^{(4)}$ und $H^{(3)}$ lassen sich alle Tensoren $H_{\mu_1 \dots}$ bis zur vierten Stufe angeben (das ist sogar mehr als in § 8 gebraucht wird). Man findet mittels der in (B 3) vorgeschriebenen Differentiation

$$\begin{aligned}H_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \frac{1}{24} [(\delta_{\mu_1 \mu_2} + e_{\mu_1} e_{\mu_2})(\delta_{\mu_3 \mu_4} + e_{\mu_3} e_{\mu_4}) \\ &\quad + (\delta_{\mu_1 \mu_3} + e_{\mu_1} e_{\mu_3})(\delta_{\mu_2 \mu_4} + e_{\mu_2} e_{\mu_4}) \\ &\quad + (\delta_{\mu_1 \mu_4} + e_{\mu_1} e_{\mu_4})(\delta_{\mu_2 \mu_3} + e_{\mu_2} e_{\mu_3}) \\ &\quad - 4 e_{\mu_1} e_{\mu_2} e_{\mu_3} e_{\mu_4}] \quad (\text{B } 7)\end{aligned}$$

dem (Tensor-)Typ

$$H_{\mu_1 \dots \mu_n}(\mathbf{e}) = \int_+ k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_n} d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_+ k_{\mu_1} \dots k_{\mu_n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} d^2 k. \quad (\text{B } 1)$$

Hierbei bedeutet \mathbf{e} einen festen, \mathbf{k} den variablen Einheitsvektor. Sie können aus dem Hilfsskalar

$$H^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{e}) = \int_+ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k})^n d\Omega \quad (\text{B } 2)$$

durch Differentiation nach dem Parametervektor \mathbf{r} gewonnen werden gemäß

$$H_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n H^{(n)}}{\partial x_{\mu_1} \partial x_{\mu_2} \dots \partial x_{\mu_n}}. \quad (\text{B } 3)$$

Die x_μ bezeichnen die kartesischen Komponenten von \mathbf{r} .

Der Hilfsskalar $H^{(n)}$ ist leicht zu finden. Man führt Polarkoordinaten ein derart, daß die kartesischen Komponenten von $\mathbf{e}, \mathbf{r}, \mathbf{k}$ durch

$$\mathbf{e} = \{0, 0, 1\}$$

$$\mathbf{r} = \{r \sin \Theta, 0, r \cos \Theta\}$$

$$\mathbf{k} = \{\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta\}$$

dargestellt sind. Damit wird

$$\left. \begin{aligned}H^{(n)} &= \pi^{-1} r^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\sin \Theta \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \Theta \cos \vartheta)^n \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= r^n \sum_m \binom{n}{m} a_{nm} c_m \cos^{n-m} \Theta \sin^m \Theta,\end{aligned} \right\} \quad (\text{B } 4)$$

$$H_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \frac{2}{15} (\delta_{\mu_1 \mu_2} e_{\mu_3} + \delta_{\mu_1 \mu_3} e_{\mu_2} + \delta_{\mu_2 \mu_3} e_{\mu_1}). \quad (\text{B } 8)$$

Durch Kontraktion $\mu_3 = \mu_4$ folgt aus (B 7)

$$H_{\mu_1 \mu_2} = \frac{1}{4} (\delta_{\mu_1 \mu_2} + e_{\mu_1} e_{\mu_2}). \quad (\text{B } 9)$$

Durch Kontraktion $\mu_2 = \mu_3$ folgt aus (B 8)

$$H_{\mu_1} = \frac{2}{3} e_{\mu_1} \quad (\text{B } 10)$$

und schließlich aus (B 9), durch Kontraktion $\mu_1 = \mu_2$, als Kontrolle

$$H = 1. \quad (\text{B } 11)$$

Natürlich sind die drei letzten Formeln einfacher aus den Hilfsskalaren $H^{(2)}, H^{(1)}, H^{(0)}$ zu gewinnen.